10 класс. Решения задач

1. Ренат взял три различных натуральных числа a, b и c и выписал в блокнотик семь чисел a, b, c, $a+b$, $b+c$, $c+a$, $a+b+c$. Какое наибольшее количество простых чисел может быть среди них?

Решение. Заметим, что среди чисел, выписанных Ренатом в блокнотик, не более четырёх нечётных. В самом деле, если все числа a, b, c чётны, то нечётных чисел в блокнотике нет вообще. Если, к примеру, a и b чётны, а c нечётно, то число $a+b$ тоже чётно. Далее, если a чётно, а b и c нечётны, то числа $b+c$ и $a+b+c$ чётны. Наконец, если все три числа a, b и c нечётны, то все числа $a+b$, $b+c$ и $c+a$ чётны. Раз среди выписанных Ренатом чисел не более четырёх нечётных, среди них не более пяти простых. Пример с пятью простыми числами: пусть $a=2$, $b=3$, $c=11$, тогда

$$a+b=5,\ b+c=14,\ a+c=13,\ a+b+c=16,$$

и среди этих чисел ровно пять простых.

2. Докажите, что любое натуральное многозначное число больше произведения своих цифр. (Число называется многозначным, если в его записи больше одной цифры.)

Решение. Пусть a — первая слева цифра k-значного числа n, $k \geqslant 2$, тогда, очевидно, $n \geqslant 10^{k-1}a$. Любая из оставшихся $k-1$ цифр числа n (кроме первой слева), разумеется, меньше 10, поэтому произведение оставшихся цифр меньше, чем 10^{k-1}. Значит, произведение всех цифр числа n меньше, чем $10^{k-1}a$.

3. Профессор математики хочет разбить множество натуральных чисел на два непересекающихся подмножества, каждое из которых не содержит бесконечной арифметической прогрессии. Возможно ли это сделать?

Решение. Да, возможно, например, так. Числа от 1 до $3=2^2-1$ поместим в первое подмножество. Числа от $4=2^2$ до $8=3^2-1$ — во второе подмножество, и так далее. Предположим, что в одном из подмножеств содержится бесконечная арифметическая прогрессия с разностью $d>0$. Существует бесконечно много натуральных n, для которых в этом подмножестве не содержатся числа от n^2 до

$$(n+1)^2-1=n^2+2n.$$

Таким образом, существует бесконечно много n, для которых в этом подмножестве не содержится $2n+1$ подряд идущих чисел. Очевидно, для какого-то натурального n число $2n+1$ больше, чем d. Противоречие.

4. Докажите, что если $|x|<1$, $|y|<1$, то

$$\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1-y^2} \geqslant \frac{2}{1-xy}.$$

Решение. Заметим, что оба слагаемых в левой части положительны. Согласно неравенсту Коши,

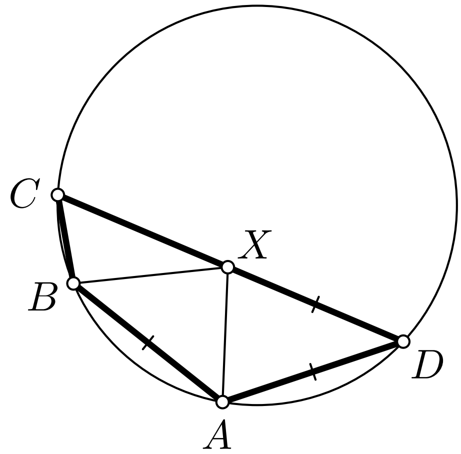
$$\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1-y^2} \geqslant \frac{2}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2-y^2+x^2y^2}}.$$

С другой стороны, $x^2+y^2 \geqslant 2xy$, поэтому $1-x^2-y^2+x^2y^2 \leqslant 1-2xy+x^2y^2=(1-xy)^2$. Поскольку $1-xy \geqslant 0$, мы получаем, что

$$\frac{2}{\sqrt{1-x^2-y^2+x^2y^2}} \geqslant \frac{2}{\sqrt{(1-xy)^2}}=\frac{2}{1-xy}.$$

5. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и AD равны, $CD > AB + BC$. Докажите, что $\angle ABC > 120^\circ$.

Решение. Предположим, что утверждение задачи не выполнено и $\angle ABC \leqslant 120^\circ$. Тогда $\angle ADC \geqslant 60^\circ$. Отметим на стороне CD такую точку X, что $DX = AD = AB$ (см. рисунок).



Для этой точки $CX = CD - AB > BC$, поэтому $\angle CBX > \angle CXB$. Далее, треугольник ADX равнобедренный, причём $AX \geqslant AD = AB$, откуда $\angle ABX \geqslant \angle AXB$. Теперь получаем, что

$$120^\circ \geqslant \angle ABC = \angle CBX + \angle ABX > \angle CXB + \angle AXB = \angle AXC,$$

поэтому $\angle AXD > 60^\circ$. Таким образом, в треугольнике ADX углы при основании больше 60°, а угол при вершине не меньше 60°, что невозможно.