11 класс. Решения задач

1. Дима написал на доске три уравнения с ненулевыми коэффициентами a, b и c: $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$. Могут ли все они иметь по два целочисленных корня?

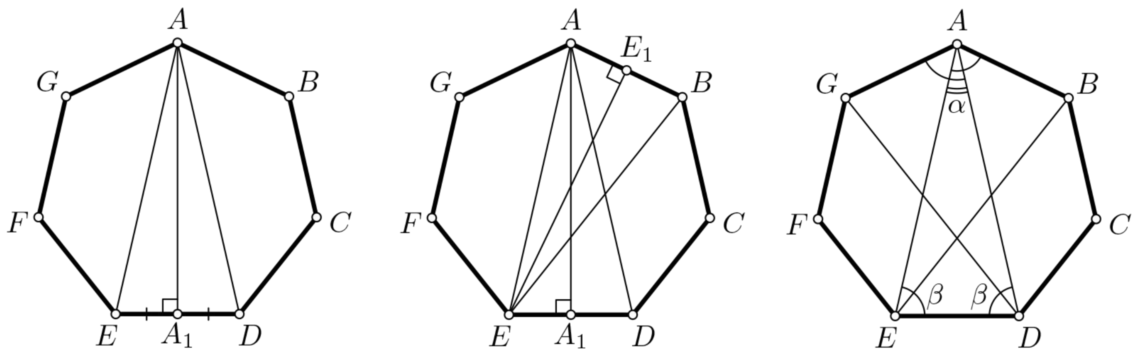
Решение. По теореме Виета, произведение корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ (соответственно, $bx^2+cx+a=0$ и $cx^2+ax+b=0$) равно c/a (соответственно, a/b и b/c). Значит, числа c/a, a/b и b/c — целые. Однако их произведение равно 1, поэтому и сами числа c/a, a/b и b/c по модулю равны единице. Но тогда дискриминант каждого из уравнений (после сокращения на старший коэффициент) равен 5 или -3, поэтому у них не может быть целых корней.

2. Найдите наименьшее натуральное число, которое в 2022 раза больше суммы своих цифр.

Решение. Сумма цифр числа имеет тот же остаток при делении на 9, что и само число. Выясним, какой остаток может иметь искомое число при делении на 9. Это должен быть такой остаток, что при умножении его на 2022 результат должен иметь такой же остаток. Число 2022 имеет остаток 6 при делении на 9. Очевидно, $6\cdot 0=0$ (остаток 0 при делении на 9 подходит), $6\cdot 1=6$, $6\cdot 2=12$ (остаток 3), $6\cdot 3=18$ (остаток 0), $6\cdot 4=24$ (остаток 6), $6\cdot 5=30$ (остаток 3), $6\cdot 6=36$ (остаток 0), $6\cdot 7=42$ (остаток 6), $6\cdot 8=48$ (остаток 3). Получается, что только остаток 0 подходит, а значит, искомое число делится на 9, то есть имеет вид $2022\cdot 9k$. Если $k=1$, то $2022\cdot 9=18198\neq 2022\cdot 27$. Если $k=2$, то $2022\cdot 18=36396\neq 2022\cdot 27$. Если $k=3$, то $2022\cdot 27=54594=2022\cdot 27$. Число 54594 подходит.

3. Высотой семиугольника назовём отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины на противоположную сторону, а медианой — отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны. Известно, что в некотором семиугольнике равны четырнадцать длин — длины всех высот и всех медиан. Докажите, что этот семиугольник — правильный. (Противоположная к вершине сторона определяется так. Занумеруем вершины семиугольника числами от 1 до 7, тогда концы противоположной к вершине 1 стороны имеют номера 4 и 5.)

Решение. В треугольнике AED (см. рисунок слева) высота AA_1 совпадает с медианой (ибо они имеют одинаковые длины), а значит, треугольник равнобедренный: $AE=AD$.



По аналогичным причинам треугольник AEB равнобедренный ($AE=EB$), см. рисунок в центре. Более того, треугольники AED и AEB равны, потому что они состоят из прямоугольных треугольников, которые равны по катету и гипотенузе. Таким образом $AB=ED$. Дословно так же можно доказать, что все стороны семиугольника $ABCDEFG$ равны ($BC=EF$, $CD=GF$, $ED=GA$, $FE=AB$, $GF=BC$, $GA=CD$). Осталось доказать, что углы равны. Обозначим $\angle EAD=\alpha$, $\angle AED=\beta$. На рисунке справа равны треугольники AED, DGA, EAB. Используя это факт, мы заключаем, что $\angle A=\angle GAB=\angle GAD+\angle EAB-\angle EAD=2\beta-\alpha$. Но то же верно и для любого другого угла семиугольника.

4. Дана последовательность $a_n = \dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 1$. Докажите, что из каких-то членов этой последовательности можно составить арифметическую прогрессию длины 2022.

Решение. Покажем, что из членов этой последовательности можно составить арифметическую прогрессию любой наперёд заданной длины k. Рассмотрим число $b_1 = a_{k!} = \dfrac{1}{k!}$. Пусть это число будет первым членом арифметической прогрессии с разностью $d = \dfrac{1}{k!}$. Тогда следующие члены этой прогрессии будут иметь вид

$$b_2 = b_1 + d = \frac{2}{k!} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k},\; b_3 = b_2 + d = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k} + \frac{1}{k!} = \frac{3}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot k},$$

и так далее: для произвольного j от 2 до k будет верно равенство

$$b_j = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (j-1) \cdot (j+1) \cdot \ldots \cdot k}.$$

5. В левой верхней клетке прямоугольной клетчатой поляны $m \times n$ сидит k бегемотиков ($k < m \leqslant n$). За один ход один из бегемотиков переходит на одну клетку вправо или вниз. Через несколько ходов все бегемотики собрались в правой нижней клетке. Каким может быть наименьшее количество клеток, не посещённых ни одним бегемотиком?

Решение. Это количество равно $(m-k)(n-k)$. Действительно, рассмотрим диагонали, идущие снизу-слева вверх-вправо. (Мы считаем, что m и n — длины горизонтальной и вертикальной сторон соответственно.) Каждую из них каждый бегемотик пересечёт ровно один раз. Длины этих диагоналей равны $1, \ldots, m-1, m, \ldots, m, m-1, \ldots, 1$, где чисел, равных m, ровно $n-m+1$ штук. Поэтому на диагоналях, длины которых равны $k+1, \ldots, m-1, m, \ldots, m, m-1, \ldots, k+1$, останутся не посещёнными как минимум $1, \ldots, m-k-1, m-k, \ldots, m-k, m-k-1, \ldots, 1$ клеток соответственно. Сумма этих чисел равна

$$(m-k)(m-k+1) + (m-k)(n-m+1) = (m-k)(n-k).$$

Покажем, что такое количество непосещённых клеток может быть. Пусть первый бегемотик пойдёт сначала вправо до конца, а потом до конца вниз. Второй бегемотик сначала спустится на одну клетку вниз, а потом пойдёт вправо до предпоследней клетки, вниз до конца и потом ещё одну клетку вправо. Третий бегемотик спустится на две клетки вниз, пройдёт вправо до предпредпоследней клетки, вниз до конца и две клетки вправо. И так далее. Последний бегемотик, в свою очередь, спустится на $k-1$ клетку вниз, потом пройдёт вправо $n-(k-1)-1$ клеток, далее вниз до конца и вправо до конца. Первый бегемотик посетит $n+m-1$ новых клеток (включая левую верхнюю), второй — $n+m-3$ новых клеток, …, последний —

$$n + m - (2(k-1)+1) = n + m - (2k-1)$$

новых клеток. Воспользуемся формулой для суммы нечётных чисел $1 + 3 + \ldots + (2k-1) = k^2$. Тогда число клеток, посещённых бегемотиками, будет равно $k(n+m) - k^2$. А число не посещённых клеток, соответственно, будет равно

$$nm - k(n+m) + k^2 = (m-k)(n-k).$$