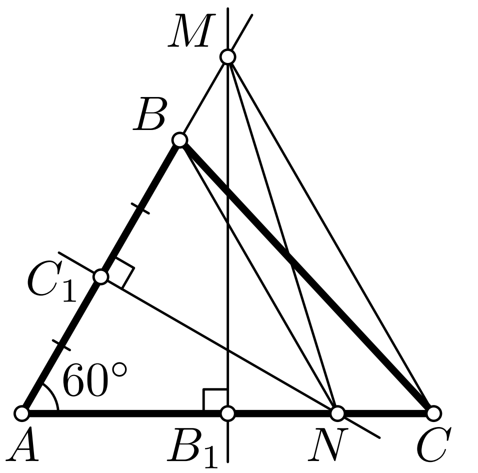
9 класс. Решения задач

1. Сколько раз нужно последовательно применить операцию извлечения квадратного корня, чтобы, начав с числа 2022, впервые получить число, которое меньше 3?

Решение. Поскольку $44^2 = 1936 < 2022 < 2025 = 45^2$, $44 < \sqrt{2022} < 45$. Далее замечаем, что $6^2 = 36 < 44$, $45 < 49 = 7^2$, так что $6 < \sqrt{\sqrt{2022}} < 7$. Наконец, $7 < 9 = 3^2$, поэтому $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2022}}} < 3$. Значит, операцию извлечения корня нужно применить три раза.

2. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает сторону AC в точке N. Серединный перпендикуляр к стороне AC пересекает продолжение стороны AB за точку B в точке M. Докажите, что $CB = MN$.

Решение. По свойству серединного перпендикуляра к стороне AB, $AN = BN$.



Треугольник ABN — равнобедренный с углом $60°$, то есть равносторонний. Аналогично, треугольник AMC — равносторонний. Треугольник AMN равен треугольнику ABC по первому признаку ($\angle A$ — общий, $AB = AN$, $AM = AC$). Значит, $CB = MN$.

3. Два двузначных числа, записанные подряд, дают четырёхзначное, которое делится на их произведение. Найдите все такие пары двузначных чисел.

Решение. Пусть a и b — наши двузначные числа, тогда четырёхзначное число из условия равно $100a + b = kab$ для некоторого натурального k. Отсюда видно, что b делится на a, то есть $b = ma$ для какого-то натурального m. Ясно, что m — однозначное число, потому что и a, и b двузначные. Таким образом, $100a + ma = kama$, то есть $100 = m(ka - 1)$, или же $100 + m = kam$. Значит, будучи однозначным делителем числа 100, m может равняться 1, 2, 4 или 5. Если $m = 1$, то $ka = 101$, но 101 — простое число. Если $m = 2$, то $ka = 51$; a не может равняться 51, потому что тогда $b = 102$, так что остаётся одна возможность: $a = 17$, $b = 34$ (и этот вариант подходит). Далее, если $m = 4$, то $ka = 26$; если $a = 26$, то $b = 104$, поэтому остаётся только вариант $a = 13$, $b = 52$ (и он подходит). Наконец, если $m = 5$, то $ka = 21$, но при $a = 21$ имеем $b = 105$ — не подходит. Итого, есть две пары таких двузначных чисел: 17 и 34, 13 и 52.

4. Даны $n > 2$ целых чисел, не равных 0. Известно, что каждое из этих чисел делится на сумму остальных $n - 1$ чисел. Докажите, что сумма всех данных чисел равна 0.

Решение. Предположим, что сумма S данных чисел не равна 0. Пусть, не умаляя общности, она положительна (в противном случае можно домножить все числа на -1, и условие не изменится, а сумма станет положительной.) Пусть a — наименьшее из данных чисел. Тогда $a < S/2$, иначе $S \geqslant na > 2 \cdot S/2 = S$ — противоречие. Но тогда число a ближе к 0, чем к S: $|a| < |S - a|$, и поскольку $a \neq 0$, a не может делиться на $S - a$ (сумму всех остальных $n - 1$ чисел). Противоречие.

5. Два школьника играют в игру. Они по очереди пишут в ряд одно из чисел 0 или 1. После того, как они сделали несколько ходов, получилось, что в ряду написанных чисел в каждых 200 подряд идущих числах поровну нулей и единиц, а в каждых 202 подряд идущих — нет. Какое максимальное количество ходов могло быть сделано?

Решение. Пусть первое число в ряду — нуль. После него идёт 199 чисел, среди которых 99 нулей и 100 единиц, чтобы выполнялось первое условие. Тогда дальше должен идти нуль. Если после него будет единица, то среди 202 первых чисел будет поровну нулей и единиц. Значит, на 202-м месте должен быть снова нуль. Аналогично дальше можно (и нужно) поставить ещё 98 нулей. А вот 99-й поставить не получится, нарушится первое условие для последних двухсот чисел. (Если ряд начинается с единицы, рассуждения аналогичные.) Таким образом, в ряду не больше трёхсот чисел. Пример, когда их ровно 300, легко построить: нужно взять 100 нулей, 100 единиц и ещё 100 нулей. Итого — 300 ходов.