

11 класс. Условия задач

1. Дима написал на доске три уравнения с ненулевыми коэффициентами a , b и c : $ax^2 + bx + c = 0$, $bx^2 + cx + a = 0$, $cx^2 + ax + b = 0$. Могут ли все они иметь по два целочисленных корня?

2. Найдите наименьшее натуральное число, которое в 2022 раза больше суммы своих цифр.

3. Высотой семиугольника назовём отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины на противоположную сторону, а медианой — отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны. Известно, что в некотором семиугольнике равны четырнадцать длин — длины всех высот и всех медиан. Докажите, что этот семиугольник — правильный. (Противоположная к вершине сторона определяется так. Занумеруем вершины семиугольника числами от 1 до 7, тогда концы противоположной к вершине 1 стороны имеют номера 4 и 5.)

4. Дана последовательность $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Докажите, что из каких-то членов этой последовательности можно составить арифметическую прогрессию длины 2022.

5. В левой верхней клетке прямоугольной клетчатой поляны $m \times n$ сидит k бегемотиков ($k < m \leq n$). За один ход один из бегемотиков переходит на одну клетку вправо или вниз. Через несколько ходов все бегемотики собрались в правой нижней клетке. Каким может быть наименьшее количество клеток, не посещённых ни одним бегемотиком?